

06 Les graphes

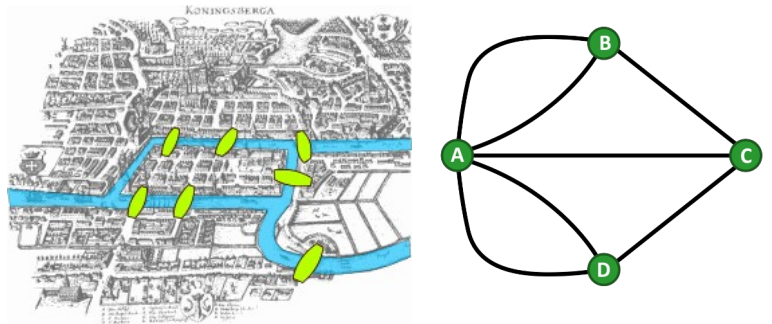
06-01 Un outil de modélisation

Définitions

Un **graphe** est un ensemble constitué de points (les **sommets**) et de lignes continues (les **arêtes**) qui relient certains de ces points.

Exemple

Le plan ci-contre de la ville de Königsberg peut être modélisé par un graphe dans lequel les arêtes sont les ponts et les sommets sont les portions de territoires délimitées par le fleuve.



Définitions

Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.

Un graphe **complet** est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

Une **chaîne** (ou **chemin**) est une liste ordonnée de sommets reliés deux à deux par une arête.

La chaîne est **fermée** lorsque son premier sommet est également son dernier sommet.

Un **cycle** est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont empruntées une fois et une seule.

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Un graphe est **connexe** quand deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Exemple

Le graphe des ponts de Königsberg est d'ordre 4. Il n'est pas complet mais il est connexe.

Le sommet A est le seul à avoir pour degré 5.

La chaîne A – D – C – A est un cycle de longueur 3.

Remarques

La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre total d'arêtes.

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

06-01 Applications du cours

Application 1

Le drapeau européen comporte 12 étoiles en référence à l'« Europe des douze » qui comporta, jusqu'en 1995 :

- l'Allemagne de l'Ouest
- la Belgique
- la France
- l'Italie
- le Luxembourg
- les Pays-Bas
- le Danemark
- l'Irlande
- le Royaume-Uni
- la Grèce
- l'Espagne
- le Portugal



1. Représenter cette situation par un graphe dans lequel les arêtes représentent les frontières terrestres.

2. Écrire le minimum de phrases possible en utilisant tous les mots suivants :

adjacent

degré

chaîne

fermée

longueur

ordre

complet

chemin

cycle

connexe

3. Déterminer un sous-graphe d'ordre 4 de ce graphe.

Application 2

Le tableau ci-contre indique, pour six espèces de poissons, lesquelles sont compatibles ou incompatibles entre elles.

1. Tracer un graphe de compatibilité.
2. Tracer un graphe d'incompatibilité.
3. Proposer une sélection de poissons pour peupler un aquarium.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	✓	x	✓	x	✓	✓
P2	x	✓	x	✓	x	x
P3	✓	x	✓	x	✓	✓
P4	x	✓	x	✓	✓	✓
P5	✓	x	✓	✓	✓	x
P6	✓	x	✓	✓	x	✓

Application 3

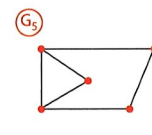
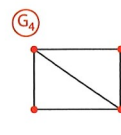
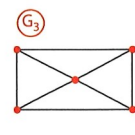
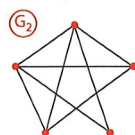
Le problème « la maison de Saint-Nicolas » consiste à effectuer le dessin ci-contre sans lever le crayon.

Dans le vocabulaire des graphes, on parle de **chaîne eulérienne**.

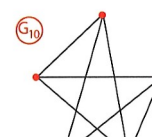
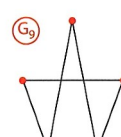
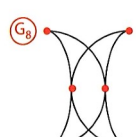
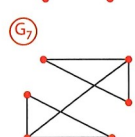
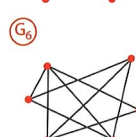
Si, en plus, la chaîne est fermée, on parle de **cycle eulérien**.



1. Parmi les graphes ci-contre, lesquels admettent une chaîne eulérienne ?



2. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe connexe admette un cycle eulérien ou, plus généralement, une chaîne eulérienne.



On admet cette conjecture : c'est le **théorème d'Euler**.

3. Appliquer le théorème d'Euler au problème des ponts de Königsberg.